

窮理通(帆足萬里著)について

村 田 三 良

帆足萬里は安永七年(1778)現在の大阪府日出町に生まれた。その家柄は萬里が十九才のとき父通文が日出藩家老職になった程であり萬里は第二子であつた。幼時から勤勉強記十四才の時日出から一里ばかり離れた処に住む脇愚山に学んで「日々唐本を読むこと高さ二寸、文を属すること数百千言」とある。二十一才の時大阪の中井竹山の門に入ったが一年余りで日出に帰り二十七才で藩学教授となり殆んど他の地に出ることなく生地にて藩士を教授し、又家塾を開いて広く門生を教えた。五十五才で家老職となつて藩政改革に着手したが五十八才で家老職を辞した。それ以後嘉永五年七十五才で没するまで種々の著述の生活に入つた模様であり、この窮理通は五十九才の時のもので初期の著述であることを考えると相当これには力を入れたものと思われる。その時代に於てこれだけの理論と計算に短時日の間に通曉しそれを展開することは不可能に近いと思われるし余程以前より理学の方面に対して造詣が深かつたものであろう。

その著書は経史、仏典、諸子百家、政治、天文、物理、鉱物、医学、数学と非常に範囲が広く、これらを当時では文化の中心から遠い豊後の地で殆んど独学で展開して行つたことには驚嘆せざるを得ない。

窮理通は巻之一から巻之八までとなつておりその大体的内容は次の通りである。

- 巻之一 原暦第一 (暦の起源について)
- 大界第二 (大界とは宇宙)
- 小界第三 (小界とは太陽系)
- 巻之二 地球第四 上
- 巻之三 地球第四 下
- 巻之四 引力第五 上
- 巻之五 引力第五 中
- 巻之六 引力第五 下
- 巻之七 大氣第六
- 巻之八 発氣第七
- 諸生第八

註 (「原暦第一」とあるのは現在の表現では「第一章原暦」という意味)

全体はすべて漢文で書かれており字数約八万の長編である。

以下はその中で巻之六について述べることにする。

窮理通の底を流れているものは実学である。和算の研

究家達が計算の巧緻末法にとらわれて實際的でなかつたのに比べ、自然現象からそのテーマをとらえている。実学という理論的でないような印象をうけるが決してそうではなく現在の物理、力学の理論も含まれており、その内容をみるとき当時としては程度の高さは相当なもので一般には仲々理解され難かつたものと思われる。

その特徴としては

1. 実験の結果が多いこと。(他人の例)
2. 図解が多い。(文字A, B, C…… a, b, c, ……の代りに甲、乙、丙、丁……壬、己及び子丑寅卯…を点の名称としている。)
3. 量の単位があいまいであること
例1. 長さと同時間を同じ単位として用いている。
2. 当時としては力とかエネルギーの絶対量の表現がないのでこれらはすべて比例関係のみで表わされている。
4. 蘭学からとつている。
5. 各内容の見出しがない。

窮理通 卷之六 引力第五下

§ I. 粘性についての解釈

(イ) 粘性はその物質が内部に含む引力である。
次のような誤解もある。

「西人以堅凝質試之。其法取二硝板淨滑不帶水湿者、相附着不可遽分解。……鉄銀その他の金属を以てしても同様であるがこれはその物質の粘性によるもので液体固体ともに同様である。」

(ロ) 表面張力

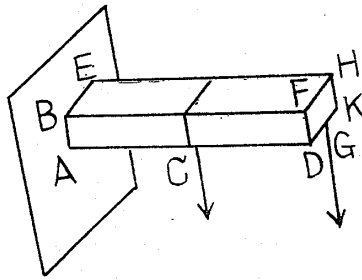
水又は水銀を硝子板の上にのせると円球となる。また硝子管の中に入れるとその表面が凹凸となる。これは前者の場合は水銀の分子相引く力が強いからで後者は水銀分子同志の引く力(凝集力)の方がガラスとの間の引く力(付着力)より強いからである。

実験：ガラス、金属各種の間に油脂をぬつて同種の板をはり合わせてそれをひやして油脂をかためた後その粘着力何ポンドと資料が書いてある、しかしこれは実際の用途は書いてない。

§ 2. 梁 (Beam)

片持梁の端に荷重をかけたとき

(1) 梁の巾、厚さが等しく長さのみ異なるときその材料を破裂させるに要する力は長さに反比例してその破裂はBに起りAに終る。



(2) 厚さ、長さが等しく巾が異なるときは破裂に要する力は巾に反比例する。

(3) 巾、長さが等しく厚さが異なるときは原本によると「二材立積之差」とあるが意味が不明である。後の計算によると断面積と角材の一辺の長さに反比例するとしているから厚さの平方に反比例させていることになる。

次のような興味ある計算をしている。

〔問題〕 後述の実験から (いろいろの材料について材料の折れる重錘の重量と折れた場所についてのデータを出してある。しかしこれらの材料は皆長さが異なっているので実験の結果が直ちには分り難い。) 樺の材料の場合でその寸法は長さ 8.5 拵 (インチ) 切口は一辺 27/100 拵 この材料で一方を固定して他端に 45 オンスの重錘をかけてこの角材が折れた。この結果を用いて長さ 10 フィート、1 フィート四角の角材を折るにはどの位の重錘をつけたらよいか。

解 小さい材料を A、大きい材料を B とする。

A 材において 8.5 インチ、48 オンスによつてその固定端に与える偶力と同じものを B の固定端で与えるための重錘の重量は

$$48 \times \frac{8.5}{120} = 3.4 \text{ オンス}$$

表現：三穩斯五分穩斯之二

角材の一辺の比が $12 : \frac{27}{100}$ であるから

$$12 \div \frac{27}{100} = \frac{400}{9} = 44 \frac{4}{9}$$

(之を $44 \frac{12}{27}$ オンスとしている)

これに 3.4 オンスをかけて

$$\frac{400}{9} \times 3.4 = \frac{1360}{9} = 151 \frac{1}{9}$$

また両材の面積比は $12^2 : \left(\frac{27}{100}\right)^2$ で

この値は $1975 \frac{25}{81}$

(1975 箇 $\frac{225}{729}$ のまゝにしてある)

小数点以下を略して 1975 とし

$$1975 \times 151 = 298225 \text{ — 答}$$

となつている。

材料実験のデータ

角材 (一辺 $\frac{27}{100}$ 拵、7mm) を金属に穴をあけたも

のに挿入して固定し端に錘をかける。

次にその例を示す。

材料	錘の位置	折れた場所	重錘(オンス)
松	十 拵	九 拵	四十
樺	八拵半	八拵零五 (8.05)	四八

同じ材料で寸法をかえての実験はやつてない。

両端を支えた梁については真中に重錘をかけたとき撓む長さは梁の長さの差であり厚さの差である。としているがこの差の意は減法の意味ではなく「違い」ということは比例するの意である。

(二) 弾性についての解釈

西人は次のように考えている。「物を曲げたとき内側は収縮して精微之氣が充満してそれにより前の形に復するのである」あるいは「それは誤つている。すでに撓んでしまうと元通り真直にならない。」等といつているが共にこだわりすぎて正しくない。萬里の解釈は「熱することにより撓屈したものは外面の分子がゆるんで伸び内面のは縮むのでそのため折れないならば熱がなくなると旧に復する。材質が堅くて分子が密なものは衝撃を与えると分断可能で材質が軟弱で分子相引く力の少ないものは元の形に復さないと考えるべきである。

と両者の場合をまとめて理論づけている。

§ 3. 水圧について (水衡術)

要約すると次の通りである。

1. 水には旁圧があり下圧の半分である。
2. 容器の水による底への圧力は容器の形を問わない。
3. 連通管では管の断面積に関係なく水面の高さは変らない。
4. 高さの異なる容器に水を満して下に同じ大きさの

小穴をあけて水を出すとき（容器の断面積は勿論同じであろう）水の出尽す時間は水面の高さの平方根に比例する。

5. 高さが同じで小穴の面積が異なるときはその水の出尽す時間はその面積に反比例する。

実験

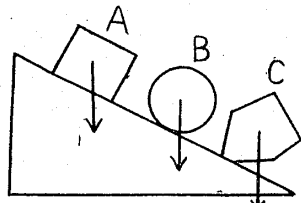
1. 高さ四尺と一尺の硝子管の場合水の出尽す時間は2対1である。
2. 4フィートのガラス管の下に銅盆をつけて小穴をあけ水を出す。管側を四百に分ける目盛を刻み下から順に1, 3, 5, 7, ……39の巾で印をつけて（合計400となる）いくとその巾の水が出る時間が殆んど同じになる。幾分の誤差があるが水の「摩擦」の為である。
3. 同じ容器の水を出すにも小穴の出口の面積は同じでもその管の長さ、形を変えて水の出尽す時間を書いてある。
4. 容器の底に管をつけて管の末端を上に向けるとき容器の水の噴出する高さは理論通りに水面の高さまでは上昇しない、これについて水面の高さと底につける管の径とについて水の噴出の高さを示している。

§ 4. 挺子等の器具の作用（衡称学）

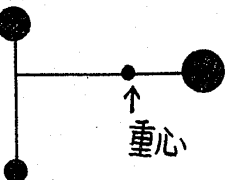
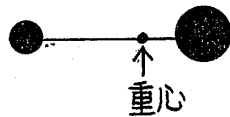
1. 重心（重点とある）の説明

立方体、球の重心の位置について、特に球の場合その重心は球の中心であるから球をつけた振子の長さは球の中心までの距離である。

また右図の場合の斜面上の物体について重心の位置によりAはすべり落ちB、Cは転がって落ちる。



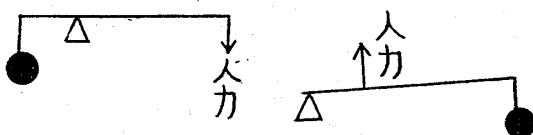
重心の求め方も正しくのべてあり、右のように二個、三個の物体についての重心も求めてある。



2. 挺子（木挺）

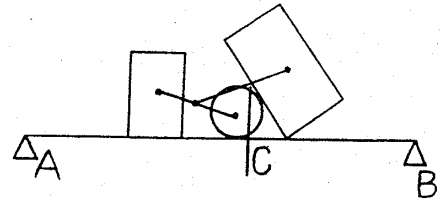
下図により挺子の理を説明してあり

支点（柱点）の位置により三種を挙げている。



このテコの原理は人体でも骨と筋の関係もはさみもこの例であるとし2000ポンドの物を30ポンドの力で動かす方法を示してある。

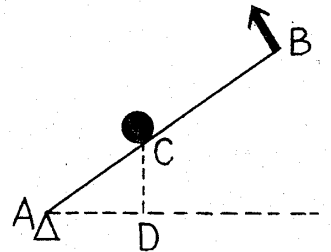
また下図の場合のA, Bにかゝる力の比はBC:ACとしている。



5. モーメントを基礎とした考え方（起器二股）

(1) テコが傾いたとき

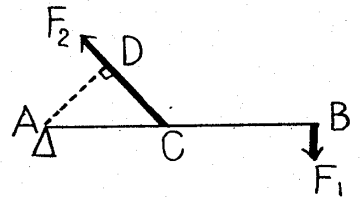
$$\frac{(C \text{ の重量})}{(B \text{ の力})} = \frac{A B}{A D}$$



(2) 釣合いの形

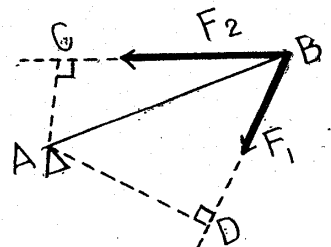
(i)

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A D}{A B}$$



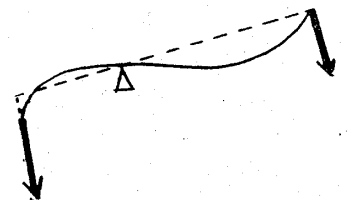
(ii)

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A C}{A D}$$



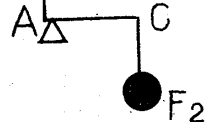
(iii)

曲つたテコ



(iv)

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A C}{A B}$$

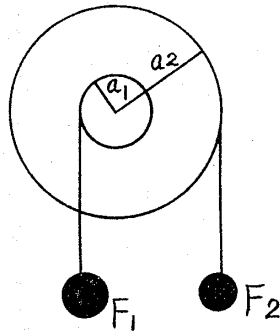


(3) 滑車 (鉛車)

定滑車、動滑車の説明があるがこれは現在の解釈の通りである。(省略)

(4) 纏車

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_2}{a_1}$$



(5) 齒車 (牙輪)

この場合も上述の如き説明あり

4.の例として車輪の半径の大小による力について同じ荷重の場合車輪の半径に反比例する力によく、車がかぼみに落ちたときに引上げるに要する力は車輪の半径が小であると大へん大きくなる。

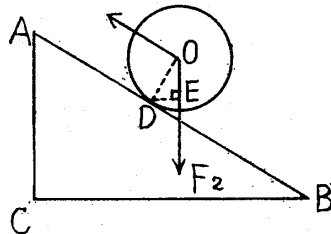
(6) 斜面について

斜面 AB を球が落ちんとするのを支える力について次の三つの場合を示してある。球の重さ F₂、支える力を F₁ とする。(点 D のまわりのモーメントによる。)

(イ) F₁ の方向が AB に平行

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AC}{AB}$$

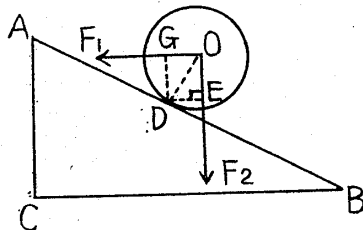
(註: $= \frac{DE}{OD}$)



(ロ) F₁ の方向が BC に平行

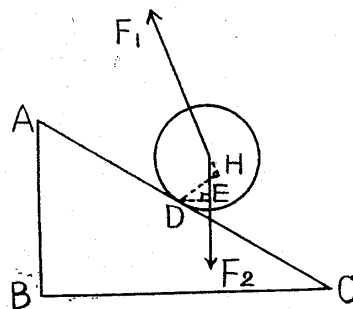
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AC}{BC}$$

(註: $= \frac{DE}{DG}$)

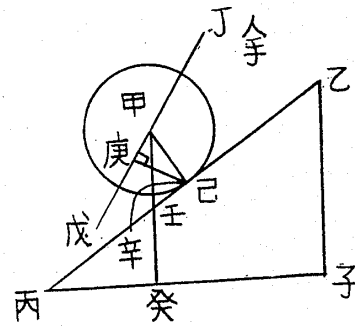


(ハ) F₁ の方向が任意のとき

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{DE}{DH}$$



作図の説明法の紹介

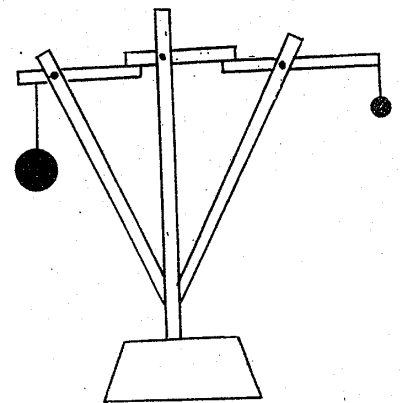


左のような図をかき要領を次のように述べている。

「一球甲在乙丙側面為丁力所引留止、丁戊為引力方向、就球与側面相切處、作己庚線、正立干丁戊、又自重点甲、作甲辛壬癸、正立干地平、又作己辛、正立干癸甲」当此時、重力所圧、在辛点、丁力甲重、如辛己与己庚。

「一球甲が斜面乙丙上にあつて (甲) 丁の向きの力でこの球を支えている。斜面と球との接点己から丁戊に垂線己庚を引き又球の重心甲から地平面に垂線を下して壬、癸をとり己からこれに下した垂線を己辛とする。」このとき辛は球の重心の下方にある (己のまわりのモーメントを等しいと置くことにより) 丁力と甲の重量の比は辛己と己庚の比である。

○次に挺子を二組利用した器具の図を詳細に説明してあり三組用いた次の図もある。



○動滑車、定滑車を複雑に組み合わせた場合の計算がなされているが全く現在と異なる処がない。

○クレーンの説明

その中で巻上機の綱が逆転しないような装置を図示している。

§ 5、摩擦

(1) 摩擦係数までには至っていないがその度合を示すものとしてミュセンブロックの法を示してある。

松板の表面を滑らかに仕上げたものを長さ 1 インチ長さ 13 インチの大きさに切り、それを別の大きい松板の上に置いて、小板の上にいるいろいろの重みをのせて、それを引張る。その荷重の大きさに摩擦の度合を調べる。

松櫨椰子の材質で上述の寸法のものを作り下の板の材質も変えて、それにのせる重量と加える荷重の表をくわしく書いている。

「摩軋測子」と名づけたものゝ説明

直径4インチの木で作った円柱に鋼鉄の軸をつけ、別に斜めになつた杵の途中に浅い溝を設けて、円柱の軸の軸受けとし、溝の部分種々の金属で変えられるようになっており、木の円柱にひもを巻いてその両端に同じ重量のおもりをかけておく。一方のひもになお荷重をかけて円柱が動くときの状態で摩擦の度合を調べる。両端に下げる重錘の重量と加へる荷重を変化させ、あるいは溝に塗油した場合等で詳しくデータを出している。

しかしデータだけで絶対量について調べるための単位は考え及ばないようである。

§ 6. 衝突 (拍撃術)

(I) 完全非弾性体の衝突

後に示される理論を現在のそれと比べるために現在のものを簡単に次に示す。

Direct Impactの場合には次のようである。

$$\begin{aligned} \text{二球の質量 } m_1, m_2 & \quad \overline{(m_1)} \rightarrow V_1 \\ \text{衝突前の速度 } V_1, V_2 & \quad \overline{(m_2)} \rightarrow V_2 \\ \text{衝突後の速度 } V & \quad \overline{(m_1+m_2)} \rightarrow V \\ m_1(V-V_1) + m_2(V-V_2) & = 0 \text{ --- (A)} \\ V = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} & \end{aligned}$$

衝突のための運動のエネルギーの減少量を ΔE とすると

註 運動のエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ であるがこの書に
よると動力といつて mv^2 で表わしているの
便宜上 V^2 で表わしておく

$$\Delta E = (m_1V_1^2 + m_2V_2^2) - (m_1V^2 + m_2V^2)$$

これに(A)を代入して

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2)^2 \text{ --- (B)}$$

万里は以上の事柄についての考察を非常に深く進めてはいるがやゝ不可解な点もある。

1. 甲乙二物体ありその(大きさ)、重量が同じであるとき

(イ) 乙が静止して甲が10の速さで衝突したときは速度は5となつて甲の運動の向きに共に動く。10の速さで動いているものの動力は $10^2 = 100$ で動力は速度の2乗に比例する。速度が5になつて動力が 2×5^2

$= 50$ となつて減ずるのは「形の変異」がその力を衆めるからである。

(ロ) 速度の向きが正反対であるとき

- (1) 甲乙の速さが各5なら物体は静止する。
- (2) 甲乙がそれぞれ6, 4の速さで同じ向きに動き他の物体(質量は同じであろう)が10の速さで反対の向きから衝突すれば三物体は静止する。

(ハ) 速度の向きが同じであるとき

この場合にはやゝ疑問がある。次にその文を示す。甲乙二体大小軽重適同、甲体速力八度、乙体二度、相逐相觸、甲力六十四、乙力四、共為六十八、及相拍撃形体変異、共失五十力、余為十八、二分得九、開平方、為三、二体皆其速前行、以二体大小輕重方向皆同故併速力得十度、二約為五度、自乘得二十五度、二体為五十度也。

以上の文中第二行に「相逐相觸」とあるから速度の向きが同じと思われる。速度の向きが正反対のときは「互行相觸」とあるし文中の衝突の説明でもはじめにその三形式として(イ)(ロ)(ハ)の場合をこの順にのべてあり、その実例の説明も(イ)(ロ)の場合の次にこの文が例として書いてあるからである。

しかし「形体変異共失五十力。」とあるからには速度の向きは反対であろう。即ち(A)において

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 \quad V_1 \sim V_2 = 10 \text{ として} \\ \Delta E = 50 \quad \text{となるからである。} \end{aligned}$$

後半では同方向に進んだ場合に衝突した後の動力を計算しているので分り難い。

2. 甲乙二体の重さが異なるとき

(イ) 「甲乙の重さの比が3:1で速度の比が1:3で速度の向きが反対のとき両者は衝突後静止する」とありその理由として

甲の場合	乙の場合
(重さ) ² × (速さ)	(重さ) ² × (速さ)

として共に9となつて同じであるとしている。

この場合運動量保存則がはつきりしていない。しかし後述(5)においてはその静止の理由を運動量保存の法則を用いないで運動のエネルギーの損失の式を用いてこの問題の場合の解釈を正しく行つている。

3. 衝突で失なわれる運動エネルギー(動力)の量(形体変異による動力の損失量)

甲、乙の重量2ポンドが3ポンド
甲、乙の速度 3, 17

この場合も「相逐相撃」とある、計算法は速度の向きが反対の場合と符合する。

(その方法)

$$\text{両者の速度の計 } V_1 + V_2 = 3 + 17 = 20$$

7. 衝撃の問題について一見奇異に思われることの説明

(イ) 相対速度が同じなら失われる動力は同じであること。

同じ重量の物体が反対向きの速度各5であるとき両者動力の合計は $2 \times 5^2 = 50$ で衝突による動力の損失は50 (両者は静止)

別に速度15, 5の二物体が同じ向きの速度で進むとき両者動力の計は $15^2 + 5^2 = 250$ それが衝突したときも50の動力を失うがこれはやゝ奇異に感じるかもしれないが両者の場合全く同じ動力を失うのである。後者の場合残りの力は2物体が進行するのに用いられるのである。

(ロ) 甲乙の速さの比が2:1で重さの比が1:2であるとき両者の動力の比は4:2であるのに衝突して何故静止するかといえは乙は甲の重さの2倍であるから遅く重いことが甲に移り難いことも2倍であるから2倍の動力を必要とするのである。

「運動量保存法則」が仲々発見され難いのである。

II 完全弾性体の衝突

この場合に於ても現在のものを簡単に次に示す

$$m_1 (V_1 - V_1') + m_2 (V_2 - V_2') = 0 \quad (1)$$

$$V_2 - V_1 = V_2' - V_1' \quad (2)$$

$$(1), (2) \text{ から } V_1 = V_2 - \frac{2m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} \quad (C)$$

$$V_1 = V_2 - \frac{2m_1 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} \quad (C)$$

1. 甲乙二物体の重量が等しいとき

(イ) 速度が反対の向きで等しいときは衝突後その速さを交換する。

(ロ) 甲の速度10で乙は静止の場合

この説明も舟上での問題に書きかえてある。即ち5の速さの舟上で舟首から5の速さで舟尾に向う乙と舟尾から5の速さで舟首に向う乙とが衝突したとすると、丁度舟の上では(イ)の場合と同じでこれを陸から見ると甲は静止して乙は10の速度を得る。

(ハ) 甲、乙の速度が異なり向きが反対のとき。甲の速度8、乙の速度4とすると(ロ)の場合の如く2の速さの舟上で考えると、同様にして甲の速度4、乙の速度8となる。

2. 甲乙二物体の重量が異なるとき

(イ) 甲の重量 2 甲の速度 9

乙の重量 1 乙は静止

甲、乙は速度が同じ向きであるとする。

〔公式(C)によれば衝突後の速度は〕
〔甲は3 乙は12となる。〕

この説明に運動のエネルギーを用いている。「甲の

速度は9であるからその動力は

$$2 \times 9^2 = 162$$

もし完全非弾性体なら衝突のために失う動力は

$$\frac{1 \times 2}{1+2} \times 9^2 = 54 \quad \text{故に動力の残りは}$$

$$162 - 54 = 108 \quad \text{之が } (m_1 + m_2) V^2 \text{ であるから}$$

$$(1+2) V^2 = 108 \text{ より}$$

$$V = 6$$

次に「以有弾力、所得之力必倍」とあるが、これは

$$V_1 = V_2 - \frac{m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} (1+e) \quad \text{において}$$

(eは反撥係数)

e = 0 と e = 1 の場合を比べて

$$\frac{m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} (1+e) \quad \text{の部分が2倍である意味}$$

である。

だから乙は12の速度を得る。

甲は同様に3の速度となるから $9 - 3 \times 2 = 3$ の速度となる。

(ロ) 甲の重量 2 甲の速度 8

乙の重量 1 乙の速度 5

で甲、乙は同じ向きの速度をもつとき衝突後は甲は6に乙は9になる。

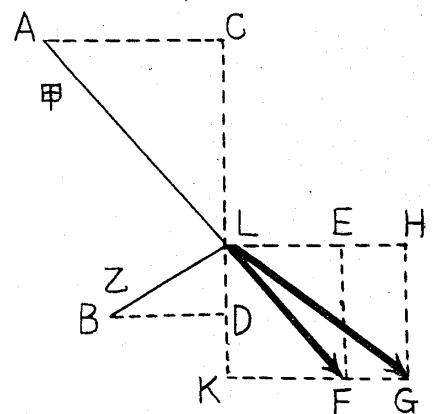
(ハ) 甲の重量 1 甲の速度 12

乙の重量 3 乙は静止

衝突後乙は6の速度となる。

III 斜衝突 (oblique impact)

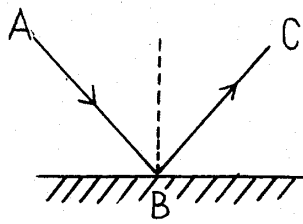
(イ) 完全非弾性体の場合



ALの速度、BLの速度の二者がLで斜衝突したときALの速度をAC, CLに分け BLを BD, LDに分ける

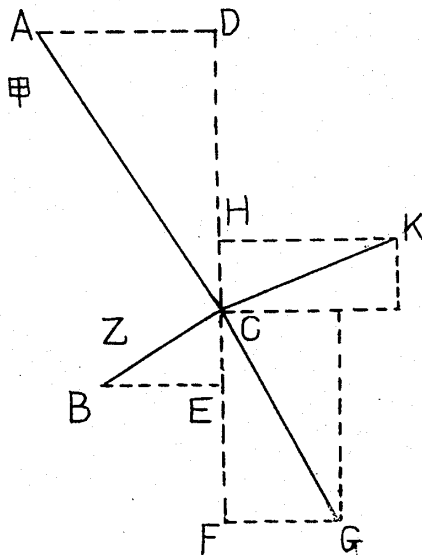
CL, DLの速度で衝突して両者がLKの速度で共に動くとするばAC=LH, BD=KFとして甲はLG, ZはLFの向きにその速度で進むことになる。

(ロ) 弾性体が弾性をもつ壁に衝突



AB, BC の速度は等しく
入射角（初角）と反射角
は等しい。

(ハ) 弾性体の斜衝突



AC, BC の速度
で図のようにC
で衝突し、速度
をそれぞれ分力
に分ける。甲、
乙物体がDC, E
Cの速度で衝突
したとき衝突後
の速度を甲はC
H、乙はCFと
すると

$$HK = AD$$

$$FG = BE$$

にとつて甲、乙の衝突後の径路と速度はCKとCGである。

以上窮理通についてその一部を紹介して来たがその内容は当時の洋書から知識を得てそれを単に訳した箇所も多いように見受けられる。しかし150年前にこれだけの内容に没頭して理解した帆足萬里は誠に偉大な人である。特にこれが独学に近い勉強で修得されたことを考えると尙更である。又機会があれば巻之一から巻之八まで紹介したいと思う。