The Theory of Paper Sculpture

折り紙についての考察

村　田　三　良

は じ め に

ちり籠の中に丸めて捨てられている紙くずをひらいてみると、無秩序に曲線または直線の「しわ」が見られる。

またそれらによって形成された平面や曲面が不規則に並んでいる。

本来一つの平面である紙が立体的な構成をなしているのが認められる。この不規則な「しわ」を規則的な線に置き換えて、それを人為的に構成すれば模様や立体ができる筈である。あるいはこのようにして作られた「もの」にいろいろの方向から光線をあてると、それが異なるものであるかのような印象を受けることもある。

紙を折って模様や立体をつくる場合、それができるためには、やはり基本的な法則があるように思われる。この意味から単に紙を折ったら偶然に「もの」ができたというのではなく、基本的法則の結合として折り紙をやっていくことにより、系統的な発展の可能性が期待されると思う。

そこでどのような場合に、どのような方法で、どのような立体の構成が可能となるかを考えて、かつそれに基づくいろいろな応用について述べてみたい。

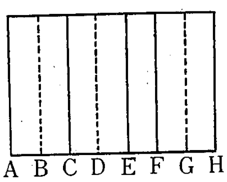
§1　折り方の表現の規約

折り紙における折り目は、2つの平面または曲面の交線としてできるが、その交線は山の尾根をなす場合、谷の線をなす場合、また台地や盆地の境界をなす場合がある。

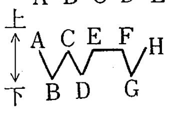
折り紙によってでき上ったものをもとの平面に直した展開図を見ると、折り目が2種類ある。即ち上に凸のものと下に凸のものとである。

前者を実線で表わして、これを正の折り目、後者を点線で表わして、これを負の折り目ということにする。

例　第1図のような紙を前述の折り目の規約に従って折ると第2図のようになるわけである



第1図



第2図

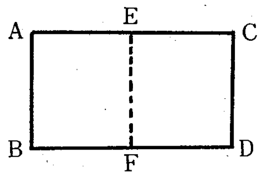
§2　色紙を折った場合の折り目について

子供の頃色紙を折った経験は誰にもあるだろうし、あるいは、小さく折りたたんである地図を買ってひろげて見た後で、元通りにたたもうとしてなかなかたためない経験もあると思う。

折り紙を系統的に行うことを試みるに当りそれらのものの折り目を考えてみることも無駄ではないと思われる。

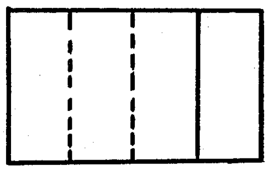
子供の折り紙はほとんど折りたためる場合であるし、こゝで推論していくのに折りたためる場合からはじめているので、子供の折り紙の展開図についての考察からはじめる。

(1)　第3図において長方形ABDCをEFを折り目として折りたたむことができる



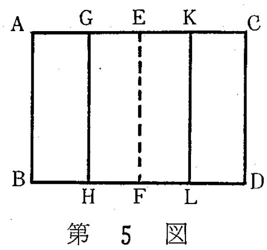
第3図

(2)　第4図は第3図で折ったものを、そのまままた2つに折った場合を示す。このとき折り目GH、KLはEFに関して対称になっておりGH、KLの折り目の符号は反対である。



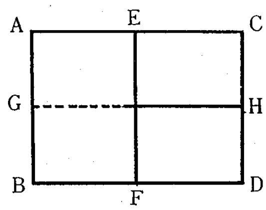
第4図

(3)　第5図の折り目は第4図のように折ることはできないで、形はジグザグの波形となる。第4図のようになれないのはGH、KLという折り目がEFに関して対称であったにしても、その符号が異ならないからである。



第5図

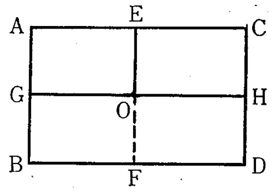
(4)　第6図は折り目EFで折って、次にそのまま、GOを折り目として4つ折りにしたものである。このときもGO、OHは折り目EF



第6図

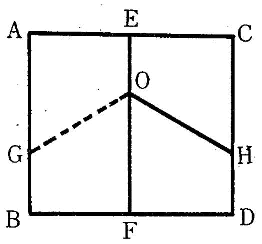
に関して対称で、折り目の符号が反対である。

(5) 第7図は折り目GHで折ってそのまま4つ折りにしたものである。



第 7 図

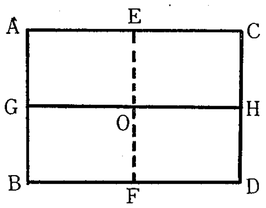
(6) 第8図については、折り目EFについて折り、次にそのままOGについて折ったものである。この場合も折り目のOG、OHはEFに関して対称で、その符号は反対である。



第 8 図

第4図〜第8図について、すべていえることであるが例えば第8図において、折り目EFについて折って長方形EFCDを長方形ABFEに折り重ねたとき、はじめの長方形中の正の折り目OHは負の折り目となってOGと重なるわけである。

(7) 第9図では折り目は対称なものがあってもそれが異符号でないから、はじめにEFについて折り次に紙をひろげて、GHについて折らねばならない。



第 9 図

以上のことから次のことが考えられる。

(1)

一回折るごとにその折り重ねて動かした方の平面上の折り目の符号はすべて反対になる。

(2)

1つの直線を折り目として折り、次にその折目に交わるような直線の折り目で続いて折るときにできる折り目は、必らずはじめの折り目に関して対称であり、その折り目の符号は反対である。

(3)

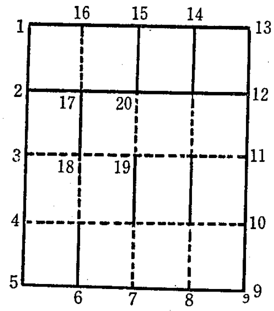
またこのようにしてできた折り目が4本あるときに、正または負の折り目の数は3または1である即ち正負の折り目は3と1とに分れる。

以上のことを基にして考えると、折ったもの、展開図を見て折った順序を知ることができる。

例1 第10図は長方形の紙を次々に折って、16等分したものである。折った順序に折り目をかくと、

①3—11 ②2—12

③15—20 ④16—17

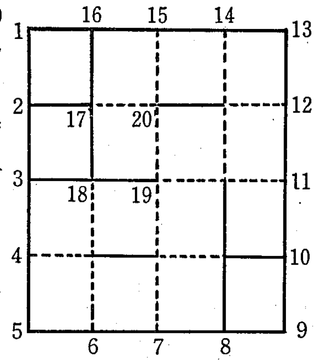


第 10 図

例2 第11図の折り目は第10図と似ているが折った順序は異なる。

①15—7 ②3—19

③16—18 ④2—17

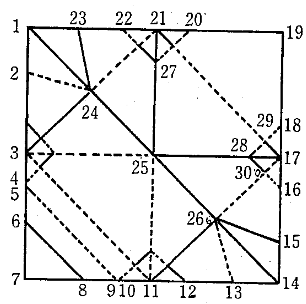


第 11 図

例3 日本の折り紙の中で「カブト」の展開図の折り目は第12図のようである。

この展開図において折った順序を考えてみると

1。図形1—3—11—14—17—21—1は直線1—14に関して対称で、折り目の符号が反対であるので1—14は第1の折り目である。しかし3—11、21—17は同符号であるので重ねて折ってはいけない。



第 12 図

2。図形25—14—17を折り目25—17で折ることができる。

3。26—17、26—15の折り目で折ることは自由である

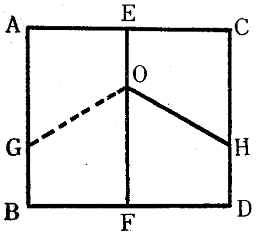
4。図形3—6—8—11は5—9を折り目として折る。次にこれを折り目3—11で折る。

5。図形16—18—28の折り方であるが、16—30は30—28に重ねて正の折り目となりそれを17—28を折り目として折って28—18の負の折り目と重なり、28—18を折り目として折ると17—29は21—29に重なり負の折り目となり次に21—29の折り目で折るのである。

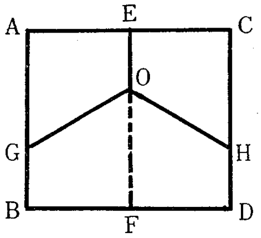
§3 テープを折ること

前述の「カブト」の場合の折り目は第6図〜第8図のようであり、即ち第8図のように点0に集まる4本の折り目のうち、はじめに折る折目OE、OFの折り目が同符号である。

しかし色紙で折る「鶴の嘴」または「ハカマのひざの部分」等では第13図のような折り目ができる。



第　8　図



第　13　図

第13図のような折り目の場合でも

<u>正、負の折り目の数は3と1</u>

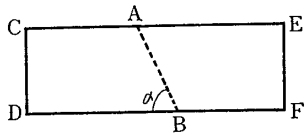
<u>$\angle$GOH$\leqq\pi$でないと折れない</u>

これから考えていく折り目の数は4のときを主とするのでこの種類の折り目をとりあげていく。

(I) 縁が平行なテープ

(1) 折ったときの性質

第14図の長方形を折って第15図になる。



第　14　図

第14図で

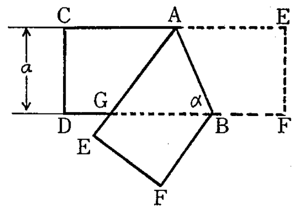
$\angle$ABD$=\alpha$とすると

第15図では

$\angle$ABG$=\angle$BAG$=$

$\angle$E′AB$=\alpha$となる。

このとき



第　15　図

$\boxed{\angle \mathrm{CAB}=\pi-\alpha}$

$\boxed{\text{CAとBFとのなす角は}\pi-2\alpha}$

である。

これを用いて$\angle$CABやCAとBFとのなす角を与角に等しくするためにαを適当に決めることができる。

例1　第15図におけるCA、AB、BF等を辺とする正n角形をつくることができる。

(イ)　$\alpha=\dfrac{2\pi}{n}$にすればよい

(ロ)　このときの正n角形の一辺ℓはテープの巾をaとして

$$\ell=\frac{a}{\mathrm{siu}\ \dfrac{2\pi}{n}}$$

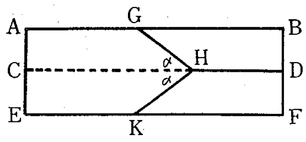
である。

例2　αの大きさを変え、または折り目間の距離を適当に変えることにより、色々のものを予め設計して作ることができる。

(2) 折りたためるもの

(イ)　テープの巾が同じ場合

第16図のように長方形AEFBをABに平行な直線CDで二分している場合、これをACDB、CEFDの2つのテープを合わせたものとみなす。



第　16　図

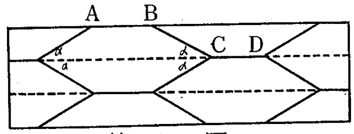
いま$\angle$GHC$=\angle$CHK$=\alpha$

とすると、テープACDBをGHを折り目として折り重ねると、CHとHDのなす角は$\pi-2\alpha$、またテープCEFDにおいても、CHとHDのなす角は$\pi-2\alpha$である。故にこの紙全体を折りたたむことができることになる。

折りたゝんだ場合のテープの縁のなす角は$\pi-2\alpha$であるから、αを適当に定めることによりその角度を与角に等しくするように予め設計することができる。

平行テープの場合折りたゝまれる条件は各の折れ線についてαが一定なことである。

例1



第　17　図

第18図のようにして折ると、テープの縁は$\pi-2\pi$の角をなして、同じ方向にまわっていく。これをいくつか続けると、いろいろな形の蛇腹のようなものができる。

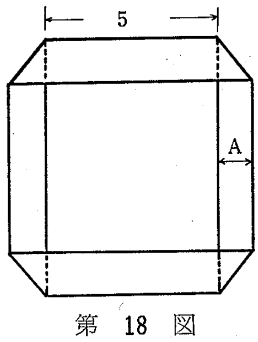
即ち第18図において

$\alpha=45°$

AB$=$CD$=\cdots\cdots 5$ cm

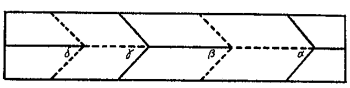
にとると、第19図のような正方形の蛇腹ができる。

αの大きさやABの長さを変えると、いろいろな形のものを予め設計することができる。

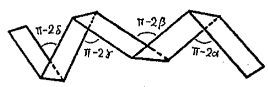


第　18　図

例2

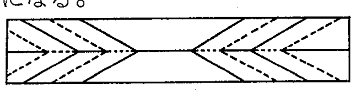

第21図(イ)

第21図ではテープの縁の方向はジグザグになり(イ)の紙を折ると(ロ)のようになる。



第21図(ロ)

例3


第　22　図

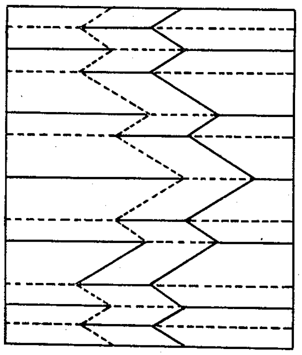
第22図のように折れ線の間隔をつめて、これをつなぐと、きれいな模様ができる。

(ロ) テープの巾が異なる場合

平行テープを折りたゝむ場合、第16図において、CH、HDとのなす角$\pi-2\alpha$が等しければよかったので、テープの巾が異なっても、この関係さえ成立すれば折りたゝめるわけである。

しかしテープの巾をかえることにより、折れ線に変化ができる。

第23図のようにテープの巾を適当に変化をもたせて模様を変えることができる。即ちテープの巾をn倍にすると折れ線の長さもn倍となる。


第 23 図

第23図の折れ線を平行でなく逆向きしてもよい。

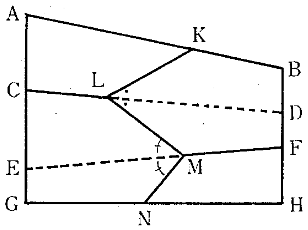
(Ⅱ) 縁が平行でないテープ

第24図においてCDを境界として、図形ACDBとCEFDを重ねることができるためには、その両者の各々についてCLとLDとのなす角が等しければよい。即ち∠KLD＝∠MLDであればよい。

同様に∠LME＝∠NME

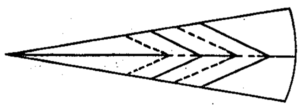
であれば、図形EGHFも前者に重なる。この場合一つの折れ線についてαが一定でないことは勿論である。

例 第24図において、AB、CD、EF、GH等について、その方向をいろいろに変え、（例えば放射状）、折れ線の角度に変化をもたせると、各種のものを作ることができる。



第 24 図

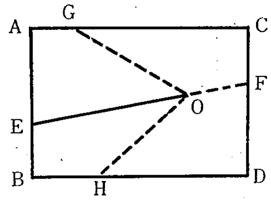
第25図のようなものを連続させて折りたゝむことができる。この後両端をくっつけると朝顔の花のようになる。


第 25 図

また折れ線の長さや角度をかえると形の変った花を設計できる。

§4 一点に集まる折り目が4本の場合の一般形

前節までは一点に集まる折り目が4本の場合で、しかも折りたゝまれる場合のみ述べてきた。そしてその4本の折り目のうち2本は一直線をなしていた。



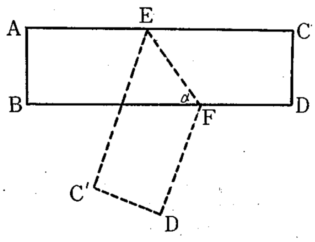
第 26 図

そのとき折りたたまれる条件は第26図において∠GOE＝∠HOEであった。

いま∠GOE≒∠HOEの場合について紙が折りたたまれるためのOFの方向、そしてどんな場合に折りたたまれるか、その条件を考えてみる。

(1) テープを折りたたんでしまわないときの関係式

前述したように第27図において、テープの縁とαをなす折り目で折りたたんだとき



第 27 図

∠AEC′＝$\pi-2\alpha$

となるが、折りたたんでしまわないときに、即ちAEECとのなす角をθになるまで折ったとき

$$\pi-2\alpha\leqq\theta\leqq\pi$$

でなければならない。

このときAE、EC′で決定される平面と、BF、FD′で決定される平面との距離をyとすると

$$y=c\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\pi-\theta}{2}}}\quad（ただしc＝AB）$$

で表わされる。

この式において

(i) $\theta=\pi$とおくと、これは折りかえす前の状態となり

$$y=c\sqrt{1-\cos\alpha}=c\sin\alpha$$

これはテープの巾である。

(ii) $\theta=\pi-2\alpha$ とおくと折り重なった場合を示しており

$$y=c\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=O$$

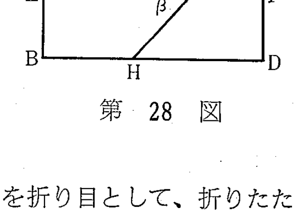
となる。

(2) テープの縁と折り目の線となす角が異なる場合

第28図のように

∠GOE≒∠HOE

である場合、これを折りたたむことはできない。



第 28 図

いま ∠GOE＝α、∠HOE＝β

とし $\alpha<\beta$ とする。

長方形AEFCをGOを折り目として、折りたたむ

とき

EO、OFのなす角は　$\pi-2\alpha$

長方形EBDFをHOを折り目として、折りたたむとき

EO、OFのなす角は　$\pi-2\beta$

である。

$\alpha<\beta$　　∴　$\pi-2\alpha>\pi-2\beta$

故にこの2つの長方形をつないだ長方形ABDCをこの折り目で折ったとき$\pi-2\alpha$のより小さくはなれない。

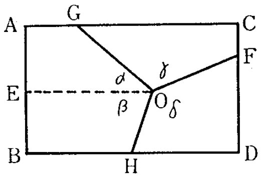
よってAG、GCの作る平面はEO、OFのつくる平面と重ねることはできるが、BH、HDの作る平面はEO、OFの作る平面に重ねることはできない。

その両平面の距離は §4(1)の式を用いて

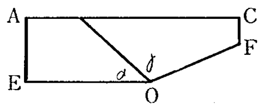
$$y=\mathrm{OH}\sqrt{1-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}}$$

となる。

(3)　$\alpha\fallingdotseq\beta$のとき折りたたんだときのOFの折り目の方向



第　29　図



第　30　図

第29図において、　$\alpha\fallingdotseq\beta$のとき、OG、OE、OHの折り目で折りたたむとき、OFの方向を考える。ただし
∠GOF $=\gamma$
∠FOH $=\delta$　とする。

第30図は第29図の一部であるが、図形AEOFCをGOを折り目として折りたゝむと、

OE、OFのなす角は　$\gamma-\alpha$　である。

同様に第29図で図形EBDFOをOHを折り目としてた折りたむと、OE、OFのなす角は　$\delta-\beta$である。

故に第29図の図形ABDCが折りたゝまれるには、OE、OFを境界にした2図形を折ったとき、OE、OFのなす角が等しくなければならない。

故にこれが折りたたまれるには

$$\gamma-\alpha=\delta-\beta$$

即ち　$\alpha+\delta=\beta+\gamma$

逆に折りたたまれたものをみれば

$$\gamma-\alpha=\delta-\beta$$

になっているのは自明である。

即ち第29図のようなOを通る4つの折り目で折りたたまれる条件は

$$\boxed{\alpha+\delta=\beta+\gamma}$$

である。

またこの両辺は各πであるから、次のように書き改めることができる。

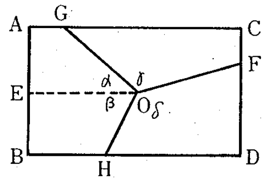
Oを通る4本の折り目でできた4つの角の隣り合わない角がたがいに補角をなすことである。

この関係はテープを折る場合についても成立する。(第16図、第24図)

故に一点に集まる4本の折り目でこれが折りたたまれる条件はこれであるといえる。

(4)　折りたたんだ場合の性質

第29図（再掲）においてこの折り目で折りたたむことができる場合



第　29　図

$\gamma-\alpha=\delta-\beta$

または

$\alpha+\delta=\beta+\gamma$

これを折りたたんだとき

(1)　GO、OFのなす角は γ である。

(2)　HO、OFのなす角は δ である。

(3)　EO、OFのなす角は $\gamma-\alpha$　または $\delta-\beta$ である。

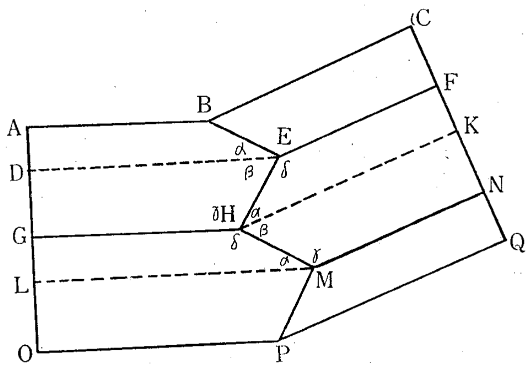
(4)　折り目OH、OGのなす角は $\beta-\alpha$ または $\delta-\gamma$ である。

以上の性質を用いると、いろいろの形のものができる

例1　第31図において、AB、DE、GH……はおのおの平行で、またBC、GF、HK……はおのおの平行であるとし、BE＝EH＝……とする。

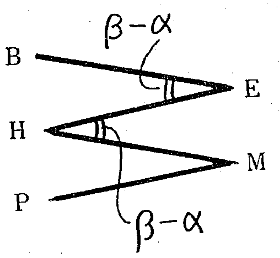
これを折りたたむと、テープの縁のなす角は $\gamma-\delta$（または $\delta-\beta$ ）となり、BE、EH、HM、……等の折り目は $\beta-\alpha$ となる。故にBE、EM、HM、……は等32図のようになる。

このでき上りは$\gamma-\alpha$の角をなす2組のテープを上に段々小さくなるように積み上げた形となる。



第　31　図

例2　第31図において
$\alpha=30°$、$\beta=60°$、$\gamma=120°$
$\delta=150°$、BE＝EH＝HM＝……
とすると、テープの縁のなす角は90°となり、折り目BE、EH、HM、……のなす角は30°である。この折れ線B—E—H—M……と全く同じものを等間隔に、対称的に（平行でなく）つけていくと、四角錐状の段が生ずる。



第　32　図

例3
第31図において
$\alpha=40°$、　$\beta=50°$、　$\gamma=130°$
$\delta=140°$、　BE＝EH＝HM＝……
としても、例2のような四角錐状のものができる。しかし例2との相違は $\beta-\alpha=10°$　で例2の場合より小さくなっているので、よりとがった四角錐ができることになる。

例4
例2の場合を予め設計することができる。でき上りのものについて
テープの縁のなす角　　θ
折れ線のなす角　　$\beta-\alpha=\varphi$
となるようにするには

$$\begin{cases} \beta-\alpha=\varphi \\ \gamma-\alpha=\theta \\ \beta+\gamma=\pi \end{cases}$$

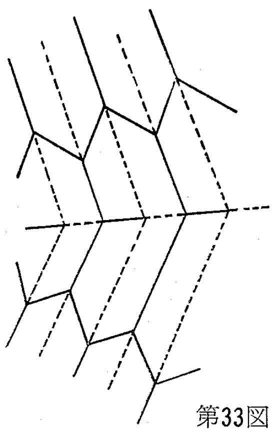
をといて

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta+\varphi}{2}、\quad \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\gamma=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta-\varphi}{2}、\quad \delta=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta+\varphi}{2}$$

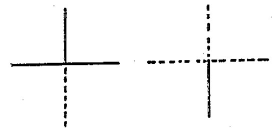
これを用いて正n角錐状のものをつくることができる。またBE、EH、HM……、折れ線の長さや $\beta-\alpha$ をかえて適当に変化をもたせることができる。またこのように段をつくったり、$\alpha=\beta$ とするものをつないで、「チョウチン」状のものを折ることもできる。

例6（たて、よこの組合せ）
第33図はこれまで折って来たものについて、たて、よこに組合せたものである。これは前のもののでき上りと比べて、より立体的である。

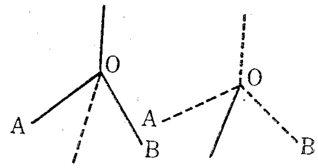

第33図

おわりに

この稿では、これまで一点に集まる折り目の数が4個のものについてのみ考えて来たがその折り目の種類は第34図の2種類だけと考えてよく、この2つが上下逆になったり、横になったりして連続しているものと解釈できる。この配列を考えて種々の例を挙げることができる。


第　34　図

また第35図のように一点に集まる折り目の数は4であるが、次の条件を満足していると、立体的なものを作ることができる。



第　35　図

「隣接する二つの折り目のなす角がいずれも180°未満で、かつ一つの異符号の折り目を中に含む2つの折り目のなす角（∠AOB）が180°より小である。」

この場合それぞれの角の大きさは任意である。しかしこの場合は勿論折りたたむことはできない。

この他残された問題は多い。即ち
(1)　一点に集まる折り目の数を増したとき。
(2)　折り目を曲線にしたとき。
(3)　折った面に歪があるとき、カッティングによって緩衝地帯を置く。
(4)　カッティングそのものによる美しさを考えるとき。
(5)　紙を折ってできたものは、元の平面の紙に比べて、「圧縮」、「曲げ」等について強いのであるが、その強さについて。

これ等のことについても、次々考えていきたいと思う。